

基于几何序列分解与稀疏重构的 DOA 估计

侯进^{1,2}, 陈鑫强^{1,2,3}

1. 西南交通大学信息科学与技术学院智能感知智慧运维实验室, 四川 成都 611756;
2. 西南交通大学综合交通大数据应用技术国家工程实验室, 四川 成都 611756;
3. 西南交通大学计算机与人工智能学院, 四川 成都 611756)

摘要: 为了解决均匀圆阵在欠定情况下对相干信号测向的问题, 提出了一种利用几何序列分解与稀疏重构相结合的波达方向 (DOA) 估计算法。几何序列分解用于拆分相干组, 并估计出每个相干组的实际方向向量, 稀疏重构则对每个相干组进行 DOA 估计。仿真结果表明, 当均匀圆阵的阵元数为 M 时, 相比于现有算法, 所提算法所能估计的最大信源数为 $M(M-1)$, 并且当信源数较多时, 其测向成功率和精度都更优, 此外, 所提算法能够解决“角度兼并”问题, 并且在极少快拍数测向任务中具有一定的优势。

关键词: 几何序列分解; 稀疏重构; 欠定情况; 相干信号; 均匀圆阵

中图分类号: TN98

文献标志码: A

DOI: 10.11959/j.issn.1000-436x.2023011

DOA estimation based on geometric sequence decomposition and sparse reconstruction

HOU Jin^{1,2}, CHEN Xinqiang^{1,2,3}

1. IPSOM Lab, School of Information Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China
2. National Engineering Laboratory of Integrated Transportation Big Data Application Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China
3. School of Computer and Artificial Intelligence, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract: In order to solve the problem of direction finding of coherent signals for uniform circular array under the condition of underdetermination, a direction of arrival (DOA) estimation algorithm combining geometric sequence decomposition and sparse reconstruction was proposed. Geometric sequence decomposition was used to split coherent groups and estimate the actual direction vector of each coherent group, while sparse reconstruction was used to estimate DOA for each coherent group. Simulation results demonstrate that when the number of elements of the uniform circular array is M , compared with the existing algorithms, the maximum number of sources that can be estimated by the proposed algorithm is $M(M-1)$. And when the number of sources is large, the success rate and accuracy of direction finding are better. In addition, the proposed algorithm can solve the “angle merger” problem, and has advantages in the direction finding tasks with very few snapshots.

Keywords: geometric sequence decomposition, sparse reconstruction, condition of underdetermination, coherent signal, uniform circular array

0 引言

随着通信、雷达等领域的发展,波达方向(DOA, direction of arrival)估计逐渐成为人们研究的热点

课题。DOA 估计的基本问题是利用阵列对空间中某一区域内感兴趣的多个信号的空间位置进行估计,它面临的挑战主要集中在以下 4 个方面: 1) 在现实通信环境中,受高大建筑物和山丘的阻碍,电磁波

收稿日期: 2022-09-09; 修回日期: 2022-11-22

基金项目: 国家重点研发计划基金资助项目 (No.2020YFB1711902)

Foundation Item: The National Key Research and Development Program of China (No.2020YFB1711902)

在传播时将发生反射，从而产生多径效应，这将使部分 DOA 估计算法失效；2) 出于成本等因素的考虑，实际阵列的阵元数往往小于目标信源数，因此，如何在欠定情况下进行 DOA 估计成为一个难题；3) 在某些特定情况下，目标信源的来波方向可能相同，而目前许多 DOA 估计算法无法对相同方向角的信源进行测向，因此，“角度兼并”问题成为 DOA 估计算法的另一挑战；4) 多快拍数在一定程度上会降低 DOA 估计算法的时效性，因此，如何在少快拍数下保证算法的高准确率和高分辨率，也成为 DOA 估计算法待解决的一个问题。

目前，根据测向原理的不同，DOA 估计方法可分为 3 类：基于特征结构子空间的方法、基于独立成分分析 (ICA, independent component analysis) 的方法和基于稀疏重构的方法。最早的超分辨率 DOA 估计方法是著名的多信号分类 (MUSIC, multiple signal classification) 算法和基于旋转不变技术的信号参数估计 (ESPRIT, estimating signal parameter via rotational invariance technique) 算法，它们都属于特征结构子空间方法，由于相干信源会使空间协方差矩阵降秩，因此传统的 MUSIC 算法和 ESPRIT 算法无法对相干信源进行测向。文献[1-2]和文献[3-4]分别提出了改进的 MUSIC 算法和改进的 ESPRIT 算法用于对相干信号进行测向，但在欠定情况下该类算法性能将大幅度下降。受均匀线阵方向向量结构的启发，Friedlander 等^[5]提出了一种将均匀圆阵转换为虚拟均匀线阵的方法，并结合均匀线阵的解相干算法，如空间平滑算法^[6-7]和矩阵重构算法^[8-10]等，可以实现均匀圆阵对相干信号的测向，但在模式转换的过程中，噪声会进一步累积，因此该类算法在低信噪比 (SNR, signal to noise ratio) 下的性能较差。Ziskind 等^[11]提出了一种基于确定性极大似然 (DML, determined maximum likelihood) 估计思想的 DOA 估计方法，能够实现均匀圆阵对相干信号的测向，但在求解过程中需要进行高维搜索，因此计算量较大，且不适合欠定情况下的 DOA 估计。Zamani 等^[12]提出了一种改进的 ICA 方法，该方法可以对混合信源进行盲分离，但在欠定情况和信源中存在相干信号时将失效。基于稀疏重构的方法可以在低信噪比和信源中存在相干信号的情况下具有良好的性能，如 Wang 等^[13]和 Trinh-Hoang 等^[14]提出的正交匹配追踪 (OMP, orthogonal matching pursuit) 算法及其改进算法、Soubies 等^[15]和 Zheng 等^[16]提出

的基于 L2 范数的方法和基于稀疏贝叶斯的方法等，但在信源数较多和入射信源示向度间隔较小的情况下，该类算法的测向性能会有所下降。

针对现有算法的不足，本文提出了一种基于几何序列分解和稀疏重构的方法用于 DOA 估计。通过分析可以发现，阵列的等时间间隔采样使接收序列成为多个复数等比序列的叠加，各个等比序列的公比蕴含了各个信源的频率信息，而首项则蕴含了信源的幅值和相位信息。因此，本文首先利用几何序列分解算法对混合序列中各个序列的公比和首项进行估计，估计的各个公比可用于信号重建，而估计的首项则可以构建各个信源的实际方向向量，即相干组标记。然后利用稀疏重构方法，即可实现对每个相干组进行 DOA 估计。

1 系统模型

1.1 均匀圆阵模型

假设空间中均匀圆阵列的阵元数为 M ，半径为 r ，阵元 1 的空间位置为 $[r, 0]^T$ ，信号的来波方向相对于 x 轴的逆时针旋转方向进行定义，如图 1 所示。

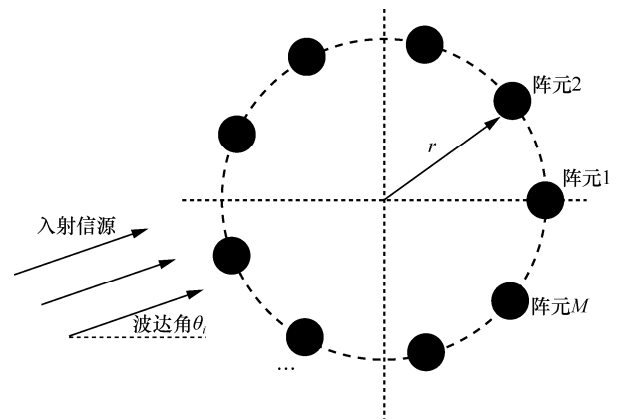


图 1 均匀圆阵示意

若从远场发射而来的复数独立信源数为 k ，则在 t 时刻，阵列的接收信号可表示为

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{S}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (1)$$

其中， $\mathbf{X}(t), \mathbf{N}(t) \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ 分别表示 t 时刻阵列的观测矢量和均值为 0、方差为 σ^2 的加性白高斯噪声矢量； $\mathbf{S}(t) = [s_1(t) \ \cdots \ s_k(t)]^T \in \mathbb{C}^{k \times 1}$ 表示 t 时刻的信源矢量； $\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_k)] \in \mathbb{C}^{M \times k}$ 表示由 k 个独立信源对应的理论方向向量构成的方向矩阵，其中，第 i 个独立信源的方向向量定义为

$$\mathbf{a}(\theta_i) = \left[e^{-\frac{2\pi r}{\lambda} \cos\left(\theta_i - (m-1)\frac{2\pi}{M}\right)} \right]^T \in \mathbb{C}^M \quad (2)$$

其中, $m=1, \dots, M$, θ_i 表示第 i 个独立信源的波达角, λ 表示信号波长。

1.2 相干信号模型

对于阵列接收的数据, 可以利用相关系数来衡量接收信号之间的相关程度, 其定义为

$$\rho_{i,j} = \frac{E\{s_i(t)s_j^H(t)\}}{\sqrt{E\{|s_i(t)|^2\}E\{|s_j(t)|^2\}}} \quad (3)$$

通过 Schwartz 不等式可以得出, 信号 $s_i(t)$ 与信号 $s_j(t)$ 的相关系数 $|\rho_{i,j}| \leq 1$, 同时, 信号之间的相关性定义为

$$\begin{cases} |\rho_{i,j}| = 0, s_i(t) \text{与} s_j(t) \text{独立} \\ 0 < |\rho_{i,j}| < 1, s_i(t) \text{与} s_j(t) \text{相关} \\ |\rho_{i,j}| = 1, s_i(t) \text{与} s_j(t) \text{相干} \end{cases} \quad (4)$$

式(4)表明, 当 2 个信号相干时, 它们之间只差一个常复数。现假设第 i 个独立信源中含有 P_i 个相干信号, 则第 i 个独立信源的接收数据可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_{i1}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{iP_i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{i1}(t) \\ \vdots \\ s_{iP_i}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{N}_i = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_{i1}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{iP_i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{i1}e^{j(2\pi f_i t + \varphi_{i1})} \\ \vdots \\ B_{iP_i}e^{j(2\pi f_i t + \varphi_{iP_i})} \end{bmatrix} + \mathbf{N}_i = \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_{i1}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{iP_i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{i1}e^{j\varphi_{i1}} \\ \vdots \\ B_{iP_i}e^{j\varphi_{iP_i}} \end{bmatrix} e^{j2\pi f_i t} + \mathbf{N}_i \quad (5) \end{aligned}$$

其中, $\mathbf{a}(\theta_{ip}) \in \mathbb{C}^M$ 、 B_{ip} 和 φ_{ip} 分别表示在第 i 个独立信源中第 p 个相干信号的理论方向向量、幅值和相位。

令

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i) = \sum_{p=1}^{P_i} \mathbf{a}(\theta_{ip}) B_{ip} e^{j\varphi_{ip}} \in \mathbb{C}^M \quad (6)$$

此时, 第 i 个独立信源的接收数据可表示为

$$\mathbf{X}_i(t) = \tilde{\mathbf{a}}(\theta_i) s_{i0}(t) + \mathbf{N}_i(t) \quad (7)$$

其中, $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ 表示第 i 个独立信源的实际方向向量, $s_{i0}(t)$ 表示频率为 f_i 、相位为 0 的复指数信号。

1.3 相干组标记

式(6)表明, 由于 $\mathbf{a}(\theta_{ip})$ 为常数向量, 且 B_{ip} 和 $e^{j\varphi_{ip}}$ 都为常数, 因此, 第 i 个独立信源的实际方向向量 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ 也为一个常数向量, 并且, 当第 i 个独立信源含有 P_i 个相干信号时, 其实际方向向量 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ 是 P_i 个相干信号理论方向向量的线性组合, 组合系数为各个相干信号对应的常复数, 因此, 每个独立信源可以看成是一个独立的相干组。式(7)表明, 每个独立信源的接收数据都含有噪声, 若把 k 个独立信源划分为 k 个相干组, 利用算法估计出每个相干组的实际方向向量, 即相干组标记, 再对每个相干组分别进行测向, 这样就能使各个相干组之间互不影响, 从而进一步提高算法的抗扰能力。

1.4 网格划分

根据阵列相关理论可知, 实际的阵列结构要求方向向量 $\mathbf{a}(\theta)$ 与方向角一一对应, 不能出现模糊现象, 而入射信源的方向角相对于整个测向平面是稀疏的, 因此, 整个二维测向平面可以进行网格划分, 以构成方向角参数空间。在实际应用中, 通常以 1° 为间隔进行网格划分, 改变方向角, 使方向向量 $\mathbf{a}(\theta)$ 在二维空间按方向角从小到大进行扫描, 所形成的曲面称为阵列流形, 所构成的矩阵称为过完备矩阵 $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{M \times 360}$, 即

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{a}(\theta) | \theta \in \Theta\} \quad (8)$$

其中, $\Theta = \{1^\circ, \dots, 360^\circ\}$ 表示方向角的参数空间。

2 基于几何序列分解的实际方向向量估计

现考虑如下情况: 假设均匀圆阵列的阵元数为 M , 入射到阵列的独立信源数为 k , 第 i 个独立信源中含有 P_i 个相干信号, 信号接收机的采样频率为 f_s , 快拍数为 L , 并假设采样是从 1 时刻开始, 则阵列的接收数据可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_{11}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{1P_1}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{kP_k}) \end{bmatrix} \cdot \\ & \begin{bmatrix} s_{11} \\ \vdots \\ s_{1P_1} \\ \vdots \\ s_{kP_k} \end{bmatrix} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta_{11}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{1P_1}) & \cdots & \mathbf{a}(\theta_{kP_k}) \end{bmatrix} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} e^{j\left(2\pi\frac{f_1}{f_s} + \phi_{11}\right)} & \cdots & B_{11} e^{j\left(2\pi\frac{f_1}{f_s} L + \phi_{11}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1P_1} e^{j\left(2\pi\frac{f_1}{f_s} + \phi_{1P_1}\right)} & \cdots & B_{1P_1} e^{j\left(2\pi\frac{f_1}{f_s} L + \phi_{1P_1}\right)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{kP_k} e^{j\left(2\pi\frac{f_k}{f_s} + \phi_{kP_k}\right)} & \cdots & B_{kP_k} e^{j\left(2\pi\frac{f_k}{f_s} L + \phi_{kP_k}\right)} \end{bmatrix} + N \quad (9)$$

将式(6)代入式(9), 并将 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)$ 进行列展开, 则式(9)可以表示为

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_1) & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_M(\theta_1) & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_M(\theta_k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{j2\pi\frac{f_1}{f_s}} & \cdots & e^{j2\pi\frac{f_1}{f_s}L} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j2\pi\frac{f_k}{f_s}} & \cdots & e^{j2\pi\frac{f_k}{f_s}L} \end{bmatrix} + N \quad (10)$$

令

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_1) & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_M(\theta_1) & \cdots & \tilde{\mathbf{a}}_M(\theta_k) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_1^1 & \cdots & r_1^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_k^1 & \cdots & r_k^L \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中, $r_i = e^{j2\pi\frac{f_i}{f_s}}, i=1, \dots, k$, 则观测矩阵 \mathbf{X} 还可表示为

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{R} + N = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_i)r_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{a}}_1(\theta_i)r_i^L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{a}}_M(\theta_i)r_i^1 & \cdots & \sum_{i=1}^k \tilde{\mathbf{a}}_M(\theta_i)r_i^L \end{bmatrix} + N \quad (13)$$

观察式(13)可以发现, 均匀圆阵第 q 个阵元的接收数据 (观测矩阵 \mathbf{X} 的第 q 行数据) 本质上是 k 个等比序列的叠加, 其中, 第 i 个等比序列的首项为 $\tilde{\mathbf{a}}_q(\theta_i)$, 公比为 $e^{j2\pi\frac{f_i}{f_s}}$, 而首项和公比分别包含了第 i 个独立信源的波达角信息和频率信息。因此, 若能估计出混合序列的 k 个公比, 然后利用一个简单的矩阵除法, 就能将 k 个独立信源的实际方向向量

估计出来, 从而用于 DOA 估计。

Lee 等^[17]提出了一种基于 k 维单纯形转换的几何序列分解 (GSD-ST, geometric sequence decomposition with k -simplexes transform) 方法, 可用于对叠加几何序列的公比进行估计。 k 维单纯形是指包含了 $k+1$ 个节点的凸多面体, 例如, 一维单纯形就是包含了 2 个节点的线段, 二维单纯形就是三角形, 三维单纯形就是四面体, 以此类推。利用 GSD-ST 方法估计公比的思路主要分为 4 个步骤: 构造搜索空间; 构造 k 维单纯形序列; 构造联合单纯形; 构造多项式方程。而多项式方程的根即待求的各个序列公比的估计。

在构造 k 维单纯形之前, 需要对原始的叠加序列按照一定方式进行采样, 以构成 k 维单纯形的顶点集合, 也称为搜索空间, 其构造规则按以下方式进行。

给定自然数 i_c 、 k 和 ϕ_k , 以 ϕ_k 为起始坐标、 $i_c \mathbf{I}_k$ 为索引变换按字典顺序对混合序列 \mathbf{x}_q 进行连续采样, 所构成的集合称为 k 维搜索空间 $\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})$, 其中, \mathbf{I}_k 表示 k 维的全 1 向量, \mathbf{x}_q 表示第 q 个阵元接收的混合序列。例如, 若 $i_c=1, k=2, \phi_k=[1,5]$, 则所构成的 k 维搜索空间为

$$\mathcal{E}_1(\phi_{2, (\mathbf{x}_q[1], \mathbf{x}_q[5])^T}) = \{(\mathbf{x}_q[1], \mathbf{x}_q[5])^T, (\mathbf{x}_q[2], \mathbf{x}_q[6])^T, (\mathbf{x}_q[3], \mathbf{x}_q[7])^T, \dots\} \quad (14)$$

由 k 维单纯形的定义可知, 一个 k 维单纯形具有 $k+1$ 个顶点, 现假设其中一个顶点为坐标原点, 剩余 k 个顶点由搜索空间中的 k 个连续顶点构成, 其定义为

$$e(\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[j] \cdots \mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[j+k-1]) \quad (15)$$

其中, $e(\cdot) \in \mathbb{C}^{k \times (k+1)}$ 表示返回值为一个 k 维单纯形的函数; $\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[j]$ 表示搜索空间中的第 j 个顶点坐标。

随着 j 的取值连续变化, $j=1, 2, 3, \dots$, 则可以构造出一个 k 维单纯形序列

$$\xi_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q}) = \left\{ e(\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[1] \cdots \mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[k]), e(\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[2] \cdots \mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k, \mathbf{x}_q})[1+k]) \cdots \right\} \quad (16)$$

需要指出的是, 在构造本文要求的 k 维单纯形时, 从搜索空间中选取的 k 个顶点必须是连续的, 且在构造 k 维单纯形序列时, 坐标 j 的取值也需要

满足连续递增的条件。

接着，从构造的 k 维单纯形序列中挑选出任意 2 个连续的单纯形，将其坐标按顺序排列，以构成一个具有 $k+2$ 个顶点的联合单纯形 $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{k \times (k+2)}$ ，定义为

$$\mathbf{C}: e\left(\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k,x_q})[j] \cdots \mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k,x_q})[j+k]\right) \quad (17)$$

从式(17)可以看出，联合单纯形 \mathbf{C} 的 $k+1$ 个非原点坐标实际上由搜索空间的 $k+1$ 个连续顶点坐标构成；然后，对这 $k+1$ 个连续顶点按组合的顺序进行采样，以构成一个含有 $k+1$ 个新的 k 维单纯形的序列。例如，若 $i_c=1, k=2, \phi_k=[1,5], j=1$ ，则所构成的联合单纯形 \mathbf{C} 和含有 $k+1$ 个新的 k 维单纯形的序列 $\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})$ 为

$$\begin{aligned} \mathbf{C}: & \left[(0,0)^T \quad (\mathbf{x}_q[1], \mathbf{x}_q[5])^T \quad (\mathbf{x}_q[2], \mathbf{x}_q[6])^T \quad (\mathbf{x}_q[3], \mathbf{x}_q[7])^T \right] \\ \boldsymbol{x}_j[1]: & \left[(0,0)^T \quad (\mathbf{x}_q[1], \mathbf{x}_q[5])^T \quad (\mathbf{x}_q[2], \mathbf{x}_q[6])^T \right] \\ \boldsymbol{x}_j[2]: & \left[(0,0)^T \quad (\mathbf{x}_q[1], \mathbf{x}_q[5])^T \quad (\mathbf{x}_q[3], \mathbf{x}_q[7])^T \right] \\ \boldsymbol{x}_j[3]: & \left[(0,0)^T \quad (\mathbf{x}_q[2], \mathbf{x}_q[6])^T \quad (\mathbf{x}_q[3], \mathbf{x}_q[7])^T \right] \end{aligned} \quad (18)$$

最后，需要构造一个 k 阶多项式，并且这个 k 阶多项式的 $k+1$ 个系数由序列 $\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})$ 中单纯形的体积通过运算得到。其中， k 维单纯形的体积定义为

$$\begin{aligned} A\left(\boldsymbol{\xi}_{i_c}(\phi_{k,x_q})[j]\right) = \\ \frac{1}{k!} \det\left(\mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k,x_q})[j] \cdots \mathcal{E}_{i_c}(\phi_{k,x_q})[j+k-1]\right) \end{aligned} \quad (19)$$

其中， $\boldsymbol{\xi}_{i_c}(\phi_{k,x_q})[j]$ 表示 k 维单纯形序列中的第 j 个 k 维单纯形， $\det(\cdot)$ 表示计算矩阵的行列式。

将 k 维单纯形序列的体积运算规则定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j(\phi_{k,x_q}) = \\ \left\{ \frac{A(\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})[1])}{A(\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})[1])} \cdots \frac{A(\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})[k+1])}{A(\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})[1])} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

其中， $\boldsymbol{x}_j(\phi_{k,x_q})$ 表示由第 j 个联合单纯形构成的含有 $k+1$ 个 k 维单纯形的序列，并且假设集合的索引值是从 1 开始的。

然后，根据 $\mathbf{v}_j(\phi_{k,x_q})$ 中的信息，将多项式定义为

$$\sum_{n=0}^k \left((-1)^{k-n} \mathbf{v}_j(\phi_{k,x_q})[k-n+1] \hat{r}^n \right) = 0 \quad (21)$$

其中， \hat{r} 表示公比的估计。

Lee 等^[17]证明，给定混合序列 \mathbf{x}_q 和独立信源数 k ，当采样间隔 $i_c=1$ 时，对于任意的自然数 ϕ_k 和 j ， k 阶多项式的系数集合 $\mathbf{v}_j(\phi_{k,x_q})$ 是唯一的，并且由这个系数集合构成的 k 阶多项式的 k 个根即混合序列中 k 个公比的估计。由于系数集合 $\mathbf{v}_j(\phi_{k,x_q})$ 在上述采样方式下与常数 ϕ_k 和 j 无关，因此，可以把系数集合记为 $\mathbf{v}(k, \mathbf{x}_q)$ 。需要注意的是，为了使构造的多项式是人们期望的结构，也就是要保证这个多项式的唯一性，在构造搜索空间时，一定要以 $1 \times \mathbf{I}_k$ 为索引变换对混合序列进行采样，即采样间隔一定要等于 1，而采样起始坐标 ϕ_k 和联合多面体 \mathbf{C} 的索引值 j 可以任取。同时，Lee 等^[17]还证明，给定混合序列 \mathbf{x}_q 和独立信源数 k ，获取 \hat{r} 的最小样本集合由混合序列 \mathbf{x}_q 的 $2k$ 个连续采样点构成，即在估计 k 个独立信源的实际方向向量时，所需要的最小快拍数 L 为 $2k$ ，这也使该算法可以在极少快拍数下对 DOA 进行有效估计。

通过以上分析可以发现，在对混合序列中各个序列的公比进行估计时，需要预先知道混合序列中的序列个数，也就是独立信源的个数 k 。Lee 等^[17]还提出了一种利用单纯形对独立信源数 k 进行估计的方法，但该方法需要进行多维搜索，计算量较大，因此会大幅度降低 DOA 估计的时效性。Bazzi 等^[18]提出了一种改进的最小描述长度 (MDL, minimum description length) 准则，可以在信噪比较低和快拍数较少的情况下对独立信源数 k 进行有效估计，且算法时效性较好，因此，可以使用该方法对 k 进行估计。

受现实扰动的影响，阵列在接收数据时会产生一定的噪声，因此，为了提升 DOA 估计的性能，需要对接收数据进行去噪。Hansen^[19]提出了一种基于 k 截断式奇异值分解 (SVD, singular value decomposition) 的去噪方法，该方法的主要思想是通过迭代的方法，不断提取原序列的 k 个主特征值和它们对应的特征向量，直到重构的序列收敛，从而达到滤除噪声的目的。该方法的去噪过程主要分为以下 5 个步骤，这里假设去噪前和去噪后的序列分别为 \mathbf{x}_q 和 \mathbf{x}_q^* ，序列的索引值从 1 开始，且快拍数为 L 。

步骤 1 通过原序列 \mathbf{x}_q 创建一个维度为

$L_h \times (L - L_h + 1)$ 的矩阵 \mathbf{Q} , 其中, $L_h = \left\lfloor \frac{L+1}{2} \right\rfloor$, 矩阵 \mathbf{Q} 满足

$$\mathbf{Q}[m, n] = \mathbf{x}_q[m + n - 1] \quad (22)$$

步骤 2 对矩阵 \mathbf{Q} 进行奇异值分解

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \quad (23)$$

其中, 矩阵 \mathbf{U} 和矩阵 \mathbf{V} 分别表示左奇异矩阵和右奇异矩阵, 矩阵 \mathbf{S} 为对角矩阵。

步骤 3 利用矩阵 \mathbf{Q} 的 k 个主特征值和对应的特征向量重构矩阵 \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}[:, 1:k]\mathbf{S}[1:k, 1:k](\mathbf{V}[:, 1:k])^H \quad (24)$$

其中, $\mathbf{U}[:, 1:k]$ 表示由矩阵 \mathbf{U} 的所有行和前 k 列构成的矩阵。

步骤 4 通过平均值的方法, 将矩阵 \mathbf{Q} 转换为序列

$$\begin{aligned} \{\mathbf{x}_q[l]\}_{l=1}^L &= \frac{1}{z} \sum_{m,n} \mathbf{Q}[m, n] \\ \text{s.t. } m+n-1 &= L \end{aligned} \quad (25)$$

其中, 当 $l \leq m$ 时, $z = l$, 否则, $z = L - l + 1$ 。

步骤 5 重复以上 4 个步骤, 直到序列 \mathbf{x}_q 收敛到序列 \mathbf{x}_q^* , 收敛后的序列 \mathbf{x}_q^* 即滤除噪声后的序列。

以上就是估计 k 个实际方向向量的整体思路, 现将算法流程总结如下。

算法 1 基于去噪 GSD-ST 的实际方向向量估计算法

- 1) 使用改进的 MDL 算法估计独立信源数 k ;
- 2) 利用 k 截断式 SVD 方法对观测矩阵 \mathbf{X} 中每一个通道的数据 $\mathbf{x}_q (q=1, \dots, M)$ 进行去噪, 得到去噪后的观测矩阵 \mathbf{X}^* ;
- 3) 从矩阵 \mathbf{X}^* 中取出第 q 个通道的数据 \mathbf{x}_q^* 构造搜索空间 $\mathcal{E}_1(\phi_{k, \mathbf{x}_q^*})$;
- 4) 根据搜索空间 $\mathcal{E}_1(\phi_{k, \mathbf{x}_q^*})$ 的信息, 构建系数集合 $\mathbf{v}(k, \mathbf{x}_q^*)$;
- 5) 根据式(21)对多项式进行求根, 得到混合序列的 k 个公比 $\hat{r}_1, \dots, \hat{r}_k$;
- 6) 根据式(12)构造矩阵 $\hat{\mathbf{R}}$, 则混合信源的实际方向矩阵的估计为 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}} = \mathbf{X}^* \hat{\mathbf{R}}^H (\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}^H)^{-1}$ 。

3 基于稀疏重构的 DOA 估计

第 2 节采用算法 1 估计出了混合信源的实际方

向矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1)_{\text{est}} \ \dots \ \tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)_{\text{est}}]$, 其列向量则对应某一个相干组的实际方向向量, 虽然该算法估计实际方向向量的顺序是随机的, 但这并不影响最终的 DOA 估计结果, 因此, 为了方便叙述, 现假设实际方向矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}}$ 的第 i 列与第 i 个相干组的实际方向向量相对应, 并用 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}}$ 表示。由相干模型和网格划分的知识可知, 当第 i 个相干组中含有 P_i 个相干信号时, 其实际方向向量是各个相干信号理论方向向量的线性组合, 且每个相干组满足空域稀疏性, 因此, 第 i 个相干组的实际方向向量 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}}$ 可用过完备矩阵 \mathbf{D} 中的稀疏基进行线性表示

$$\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}} = \mathbf{D}\mathbf{V}_i + \mathbf{n}_i \quad (26)$$

其中, $\mathbf{D} = [\mathbf{a}(1^\circ) \ \dots \ \mathbf{a}(360^\circ)] \in \mathbb{C}^{M \times 360}$; $\mathbf{V}_i \in \mathbb{C}^{360}$ 为稀疏度等于 P_i 的稀疏矩阵, 即 \mathbf{V}_i 中只有 P_i 个非零元素, 其余元素值都为 0, 并且非零元素的位置和值分别对应各个相干信号的正确波达方向和相应的复常数; $\mathbf{n}_i \in \mathbb{C}^M$ 为叠加的噪声向量。

根据上述分析可知, 通过网格划分构造了一个过完备矩阵 \mathbf{D} , 并利用过完备矩阵中的稀疏基对第 i 个相干组的实际方向向量进行了稀疏表示, 将第 i 个相干组中多径信号的 DOA 估计问题转换为空间谱 \mathbf{V}_i 的稀疏重构问题, 若对每个相干组都进行稀疏重构, 得到 k 张空间谱 $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_k)$, 即可估计出所有入射信源的波达角信息。

在求解第 i 个相干组的稀疏矩阵 \mathbf{V}_i 时, 由于稀疏度 P_i 事先未知, 且实际方向向量 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}}$ 的维度远小于矩阵 \mathbf{V}_i 的维度, 因此式(26)具有无数个解。根据压缩理论知识可知, 如果过完备矩阵 \mathbf{D} 满足约束等距性 (RIP, restricted isometry property) 条件, 即可利用矩阵 \mathbf{V}_i 的稀疏性, 将式(26)转换为一个组合优化问题进行求解。现对该条件进行简单验证, 由于

$$\frac{\|\mathbf{D}\mathbf{V}_i\|_2}{\|\mathbf{V}_i\|_2} = \sqrt{M} \quad (27)$$

其中, $\|\cdot\|_2$ 表示对矩阵取 2 范数。因此, 过完备矩阵 \mathbf{D} 满足 RIP 条件, 则稀疏矩阵 \mathbf{V}_i 可通过以下优化表达式进行求解

$$\begin{aligned} \min \|\mathbf{V}_i\|_1 \\ \text{s.t. } \tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}} &= \mathbf{D}\mathbf{V}_i + \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad (28)$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 表示对矩阵取 1 范数。

在求解式(28)时, 可以通过正则化对这个非线性凸优化问题进行求解, 其代价函数为

$$\min \|\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}} - \mathbf{D}\mathbf{V}_i\|_2 + \lambda \|\mathbf{V}_i\|_1 \quad (29)$$

其中, λ 为正则化系数。

在实际仿真时, 为了高效地找到全局最优解, 可以利用二阶锥规划 (SOCP, second order cone programming) 算法在内点法的框架下对式(29)中的优化表达式进行求解, 基于此, 可以通过引入辅助向量的方式, 将式(29)转换为以下优化表达式进行求解

$$\begin{aligned} \min e + \lambda f \\ \text{s.t. } \|\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}} - \mathbf{D}\mathbf{V}_i\|_2 \leq e, \mathbf{I}\mathbf{q} \leq f \\ |\mathbf{V}_i(j)| \leq \mathbf{q}(j), j=1, \dots, 360 \end{aligned} \quad (30)$$

其中, e 和 f 表示辅助变量, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{1 \times 360}$ 表示全 1 的行向量, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{360}$ 表示辅助向量, $|\mathbf{V}_i(j)|$ 表示对稀疏矩阵 \mathbf{V}_i 中的第 j 个元素值取绝对值操作, $\mathbf{q}(j)$ 表示辅助向量 \mathbf{q} 中的第 j 个元素值。

需要注意的是, 正则化系数 λ 的选取对稀疏重构的效果有着举足轻重的作用, 文献[14]给出了正则化系数 λ 的选取规则, 由于本文通过 k 截断式 SVD 算法对原观测矩阵进行了去噪处理, 因此系数 λ 的值不应取得太大, 在实际仿真时, 系数 λ 在区间[0.1, 3]内进行取值都能达到很好的效果。

以上就是本文所提算法的全部分析过程, 现将算法流程总结如下。

算法 2 基于去噪 GSD-ST 和稀疏重构的 DOA 估计算法

1) 利用算法 1 得到独立信源数 k 和实际方向矩阵的估计 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}} = \mathbf{X}^* \hat{\mathbf{R}}^H (\hat{\mathbf{R}} \hat{\mathbf{R}}^H)^{-1}$;

2) 以 1° 为间隔对空间进行网格划分, 构造过完备矩阵 \mathbf{D} ;

3) 令 $\tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}} = [\tilde{\mathbf{a}}(\theta_1)_{\text{est}} \ \dots \ \tilde{\mathbf{a}}(\theta_k)_{\text{est}}], i=1$;

4) 利用优化表达式(30)对 $\tilde{\mathbf{a}}(\theta_i)_{\text{est}}$ 进行稀疏重构, 得到稀疏矩阵 \mathbf{V}_i ;

5) 将稀疏矩阵 \mathbf{V}_i 的元素值画成空间谱, 通过谱峰搜索返回第 i 个相干组的 DOA 估计值;

6) $i=i+1$, 如果 $i \leq k$, 返回步骤 4), 否则算法结束。

4 性能分析

由于本文使用的信源数估计算法为改进的 MDL 算法, 因此, 基于 GSD-ST 的实际方向向量估计算法最多能够估计出 M 个独立信源的实际方向向量; 并且, 一般情况下入射信源的幅值满足随机分布, 对于每一个相干组, 稀疏重构算法能够估计出 $M-1$ 个相干信号^[20], 因此, 本文所提算法最多能够估计出 $M(M-1)$ 个入射信源, 即能够实现现在欠定情况下对相干信号的 DOA 估计; 在第 2 节的分析中, 本文对相干组进行了拆分, 即每个相干组的 DOA 估计互不影响, 因此, 本文所提算法能够解决“角度兼并”问题; 此外, 在估计实际方向向量时, 所需的最小快拍数 $L=2k$, 因此, 本文所提算法可以在极少数快拍下实现 DOA 估计。

5 仿真分析

为了验证本文所提算法的性能, 本节将其与非线性快速独立成分分析 (FastICA, fast independent component analysis) 算法^[20]、OMP 算法^[13]、MUSIC 算法^[1]和 DML 算法^[11]进行对比, 并通过 5 个实验进行说明。

实验 1 相干组拆分性能分析

实验条件: 均匀圆阵的阵元数 $M=3$, 半径 $r=0.58$ m, 信号的中心频率 $f=500$ MHz, 相干组个数 $k=3$, 正确示向度分别为 $[32^\circ]$ 、 $[210^\circ]$ 、 $[89^\circ]$, 信噪比 $\text{SNR}=[-18, 18]$ dB, 快拍数 $L=200$, 蒙特卡罗实验 200 次。相干组拆分效果通过改进的行元素优势指标^[21]进行分析, 定义为

$$p = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^k \frac{|G_{ij}|^2}{\max_l |G_{il}|^2} - 1 \right) + \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^k \frac{|G_{ij}|^2}{\max_l |G_{jl}|^2} - 1 \right) \quad (31)$$

其中, $\mathbf{G} = (\tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}}^H \tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_{\text{est}}^H \tilde{\mathbf{A}}$ 表示分离矩阵与混合矩阵的乘积。如果 p 指标系数小于 2, 则表示算法盲分离的效果较好。

图 2 为非线性 FastICA 算法与本文所提算法的盲分离效果对比。从图 2 中可以看出, 相比于非线性 FastICA 算法, 本文所提算法在低信噪比下的 p 指标系数都小于 2, 这表明本文所提算法可以在低信噪比下对相干组进行有效拆分, 且拆分效果优于非线性 FastICA 算法。

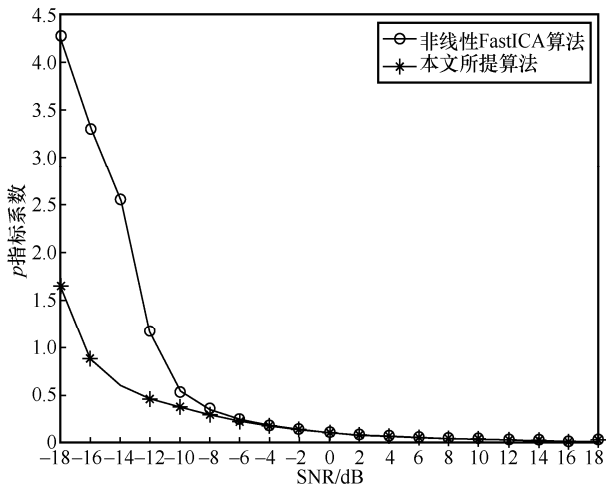


图 2 2 种算法盲分离效果对比

为了进一步说明本文所提算法拆分相干组的效果,图 3 和图 4 给出了当信噪比为-18 dB 时相干组拆分前后的数据频谱曲线。

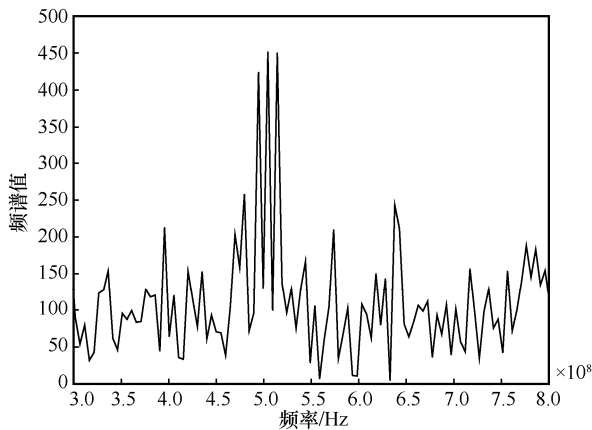


图 3 拆分前的数据频谱曲线

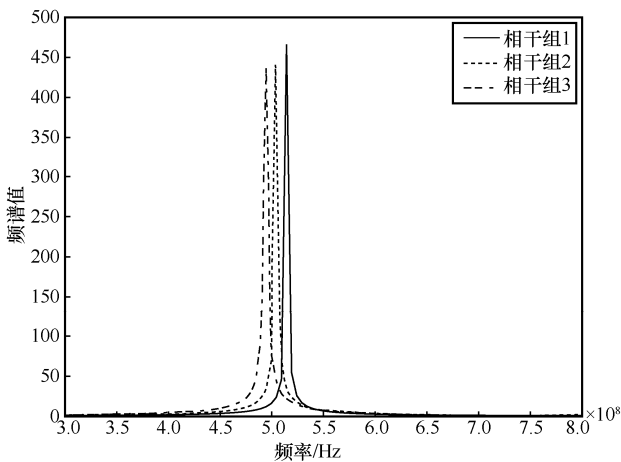


图 4 拆分后的数据频谱曲线

对比图 3 和图 4 可以看出,混合数据的频谱中有许多伪峰,而本文所提算法对混合数据进行盲分

离后,其频谱曲线滤除了由噪声引起的伪峰,并且能够准确恢复出信号的频率信息,这也验证了算法 1 的正确性。

实验 2 欠定情况下对相干信号的 DOA 估计

实验条件:均匀圆阵的阵元数 $M=3$, 半径 $r=0.58$ m, 信号的中心频率 $f=500$ MHz, 相干组个数 $k=3$, 相干系数分别为 $\rho_{1,1} = -0.416+0.909i$ 、 $\rho_{2,2} = 0.921+0.389i$ 和 $\rho_{3,3} = 0.853 - 0.522i$, 正确示向度分别为 $[32^\circ, 328^\circ]$ 、 $[30^\circ, 210^\circ]$ 、 $[89^\circ, 272^\circ]$, 信噪比 $SNR=10$ dB, 快拍数 $L=200$ 。

在上述实验条件下,改进的 MDL 算法估计出的独立信源(相干组)数 $k=3$, 因此, MUSIC 算法和 DML 算法只能估计出 3 个信号的示向度,为了验证本文所提算法在欠定情况下对相干信号的 DOA 估计性能,将其与 OMP 算法进行了对比。图 5 和表 1 分别为 OMP 算法与本文所提算法在欠定情况下对相干信号的测向空间谱和对应的测向结果。

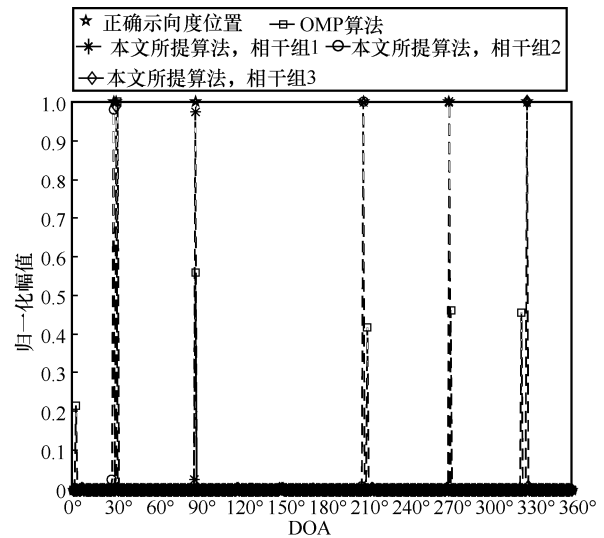


图 5 2 种算法在欠定情况下对相干信号的测向空间谱

表 1 2 种算法在欠定情况下对相干信号的测向结果

算法	DOA 估计结果	最大误差	错误个数
目标 DOA	$[[32^\circ, 328^\circ], [30^\circ, 210^\circ], [89^\circ, 272^\circ]]$	—	—
OMP 算法	$[3^\circ, 325^\circ, 33^\circ, 213^\circ, 89^\circ, 273^\circ]$	3°	1
本文所提算法	$[[32^\circ, 328^\circ], [30^\circ, 210^\circ], [89^\circ, 272^\circ]]$	0°	0

从图 5 和表 1 可以看出,在欠定情况下,OMP 算法估计出的 DOA 结果相较正确结果的误差最大达到了 3°,并且由于 30°和 32°这 2 个示向度较接

近, OMP 算法不能有效分辨, 从而出现了 3° 这个错误估计结果; 本文所提算法不仅能够有效拆分出 3 个相干组, 且 DOA 估计结果全部正确, 这也验证了本文所提算法所能准确估计的最大信源数为 $M(M-1)$ 的结论。

实验 3 极少快拍数下的测向性能

实验条件 均匀圆阵的阵元数 $M=9$, 半径 $r=0.58$ m, 信号的中心频率 $f=500$ MHz, 独立信源数 $k=3$, 正确示向度分别为 $[15^\circ]$ 、 $[167^\circ]$ 和 $[251^\circ]$, 信噪比 $SNR=30$ dB, 快拍数 $L=6$ 。

在极少快拍数的情况下, 本节对比了 OMP 算法、MUSIC 算法和 DML 算法, 由于 DML 算法需要进行高维搜索, 因此没有画出 DML 算法的空间谱, 只记录了对应的测向结果。图 6 和表 2 分别为对比算法与本文所提算法在极少快拍数下的测向空间谱和对应的测向结果。

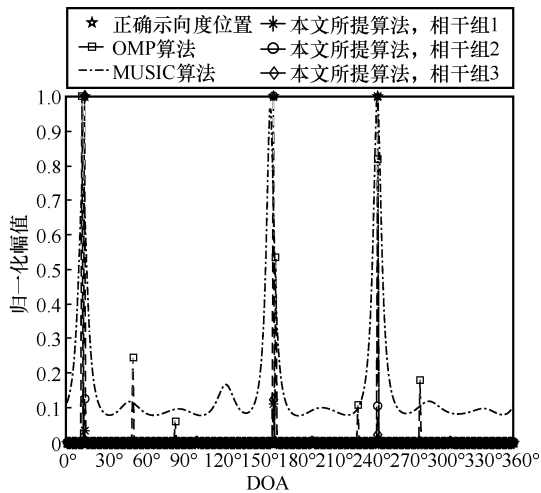


图 6 3 种算法在极少快拍数下的测向空间谱

表 2 4 种算法在极少快拍数下的测向结果

算法	DOA 估计结果	最大误差
目标 DOA	$[[15^\circ],[167^\circ],[251^\circ]]$	—
OMP 算法	$[13^\circ,169^\circ,251^\circ]$	2°
MUSIC 算法	$[14^\circ,164^\circ,251^\circ]$	3°
DML 算法	$[13^\circ,167^\circ,250^\circ]$	2°
本文所提算法	$[[15^\circ],[167^\circ],[251^\circ]]$	0°

从图 6 和表 2 可以看出, 在极少快拍数的情况下, OMP 算法、MUSIC 算法和 DML 算法在测向时会有 $2^\circ \sim 3^\circ$ 的测向误差, 而本文所提算法能够精确地对入射信号进行 DOA 估计。在实验过程

中还发现, 快拍数的减小会使噪声对测向的影响变得很大, 因此, 极少快拍数测向只适用于信噪比较高的情况, 虽然现实测向情况较复杂, 但本文所提算法为极少快拍数测向提供了一定的理论和仿真依据。

实验 4 入射信源角度差对测向成功率的影响

实验条件 均匀圆阵的阵元数 $M=9$, 半径 $r=0.58$ m, 信号的中心频率 $f=500$ MHz, 独立信源数 $k=2$, 正确示向度分别为 $[123^\circ]$ 和 $[123^\circ+\Delta\theta(\Delta\theta=0^\circ, \dots, 6^\circ)]$, 信噪比 $SNR=10$ dB, 快拍数 $L=200$, 蒙特卡罗实验 200 次。

图 7 为 4 种算法测向成功率随信号角度差变化的曲线。从图 7 可以看出, OMP 算法、MUSIC 算法和 DML 算法都无法分辨出角度差为 0° 的 2 个入射信号, 并且 OMP 算法和 MUSIC 算法在入射信源夹角超过 4° 时才能达到很好的分辨效果。本文所提算法由于对相干组进行了拆分, 相干组之间的测向互不影响, 因此可以对角度差较小的入射信号进行精确分辨。

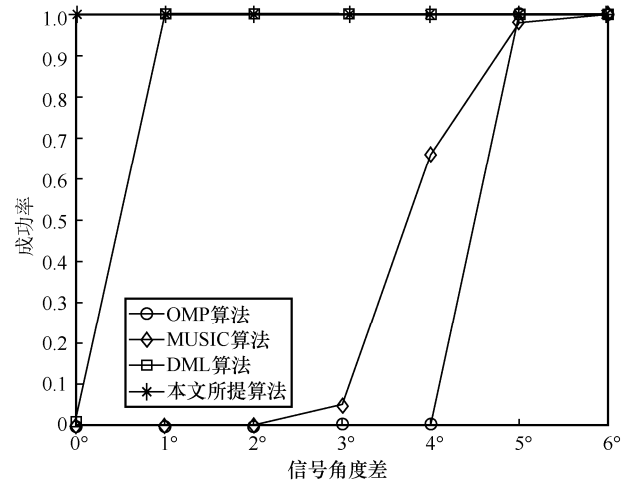


图 7 4 种算法测向成功率随信号角度差变化的曲线

实验 5 信噪比对测向成功率和测向精度的影响

实验条件 均匀圆阵的阵元数 $M=9$, 半径 $r=0.58$ m, 信号的中心频率 $f=500$ MHz, 独立信源数 $k=3$, 正确示向度分别为 $[52^\circ]$ 、 $[189^\circ]$ 和 $[297^\circ]$, 快拍数 $L=200$, 蒙特卡罗实验 200 次。其中, 测向精度采用均方误差根 (RMSE, root mean square error) 进行定义

$$RMSE(SNR) = \sqrt{\frac{1}{Qk} \sum_{q=1}^Q \sum_{i=1}^k (\hat{\theta}_{qi} - \theta_i)^2} \quad (32)$$

其中, Q 表示测向正确示向度的次数, 即测向误差结果在 3° 范围内的个数; $\hat{\theta}_{qi}$ 表示在第 q 次测向时对第 i 个示向度的估计值。

图 8 和图 9 分别给出了 4 种测向算法的成功率和 RMSE 随信噪比变化的曲线。从图 8 可以看出, 当信噪比大于 -16 dB 时, 本文所提算法的测向成功率可达 90% 以上, 且高于 OMP 算法和 MUSIC 算法; 当信噪比大于 -14 dB 时, 本文所提算法的测向成功率可达 99% 以上, 这充分说明了本文所提算法在低信噪比下能够对多个信号进行有效的 DOA 估计。从图 9 可以看出, 当信噪比大于 -16 dB 时, 本文所提算法的测向精度达到了 0.5° 以上, 且对应的精度曲线收敛到了 0° , 而 OMP 算法、MUSIC 算法和 DML 算法对应的测向精度曲线分别收敛到了 0.8° 、 1.2° 和 0.7° 。综合来看, 相比于其他 3 种测向算法, 本文所提算法的抗噪能力和测向精度更优。

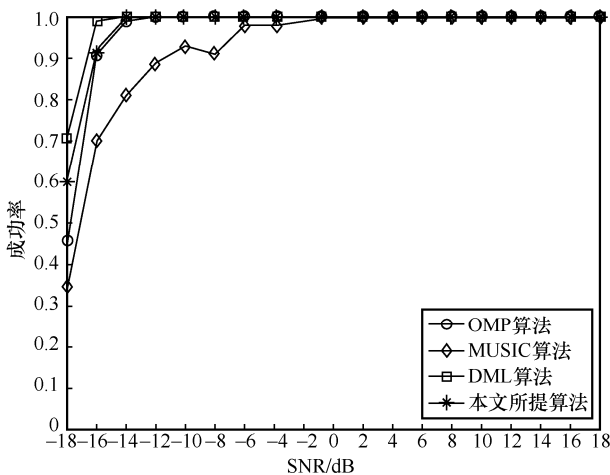


图 8 4 种算法测向成功率随信噪比变化的曲线

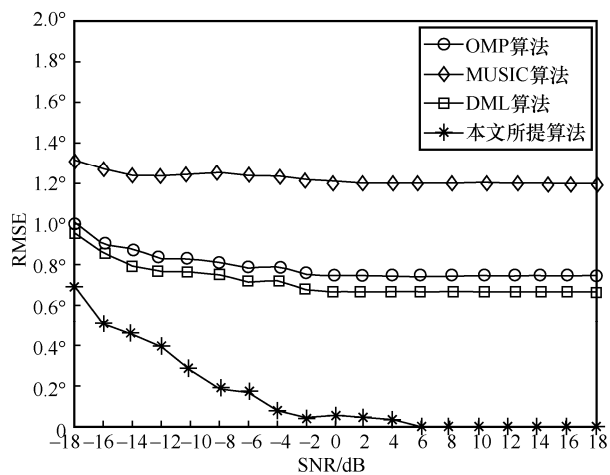


图 9 4 种算法测向精度随信噪比变化的曲线

6 结束语

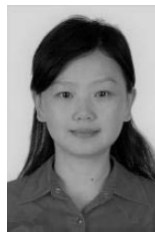
本文以提升均匀圆阵对相干信号的测向性能为目标, 提出了一种去噪 GSD-ST 与稀疏重构相结合的 DOA 估计算法, 去噪 GSD-ST 算法保证了对相干组拆分和估计实际方向矩阵的有效性和稳定性, 稀疏重构算法则利用估计的实际方向矩阵对每个相干组进行 DOA 估计。仿真实验表明, 在欠定情况和入射信源存在相干信号时, 本文所提算法的测向准确率和抗扰能力都更优。当入射信源角度差较小和信源数较多时, 本文所提算法的测向优势更明显; 同时, 本文所提算法为极少快拍数测向提供了理论和仿真依据。接下来, 笔者将进一步探索如何在低信噪比下利用极少快拍数进行测向的问题, 以进一步提高算法的测向性能。

参考文献:

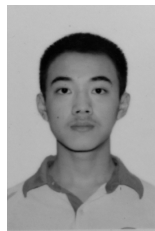
- [1] SU S J, ZHENG W Q. A modified MUSIC algorithm for DOA estimation[J]. *Advanced Materials Research*, 2013, 658: 652-657.
- [2] LIU G H, CHEN H, SUN X Y, et al. Modified MUSIC algorithm for DOA estimation with nyström approximation[J]. *IEEE Sensors Journal*, 2016, 16(12): 4673-4674.
- [3] FAYAD Y, WANG C Y, CAO Q S, et al. A developed ESPRIT algorithm for DOA estimation[J]. *Frequenz*, 2015, 69(5-6): 263-269.
- [4] XIAO M L, DUAN Z B, YANG Z L. A weighted forward-backward spatial smoothing DOA estimation algorithm based on TLS-ESPRIT[J]. *IEICE Transactions on Information and Systems*, 2021, 104(6): 881-884.
- [5] FRIEDLANDER B, WEISS A J. Direction finding using spatial smoothing with interpolated arrays[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992, 28(2): 574-587.
- [6] WEN J, LIAO B, GUO C T. Spatial smoothing based methods for direction-of-arrival estimation of coherent signals in nonuniform noise[J]. *Digital Signal Processing*, 2017, 67: 116-122.
- [7] XU H Y, CUI W J, DU Y X, et al. The analysis of using spatial smoothing for DOA estimation of coherent signals in sparse arrays[J]. *International Journal of Antennas and Propagation*, 2021: doi.org/10.1155/2021/4447562.
- [8] ZHANG X, LIU X M, YU H X. Improved MUSIC algorithm for DOA estimation of coherent signals via toeplitz and fourth-order-cumulants[J]. *International Journal of Control and Automation*, 2015, 8(10): 261-272.
- [9] LI J X, LI D M, LI X G. A real-valued toeplitz matrix method for DOA estimation[J]. *Canadian Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2020, 43(4): 350-356.

- [10] LIU S H, MAO Z H, ZHANG Y D, et al. Rank minimization-based toeplitz reconstruction for DoA estimation using coprime array[J]. IEEE Communications Letters, 2021, 25(7): 2265-2269.
- [11] ZISKIND I, WAX M. Maximum likelihood localization of multiple sources by alternating projection[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1988, 36(10): 1553-1560.
- [12] ZAMANI A, KLIMKE M, DARTMANN G, et al. Convolutional blind source separation with independent vector analysis and beamforming[C]//Proceedings of 2019 1st International Conference on Electrical, Control and Instrumentation Engineering (ICECIE). Piscataway: IEEE Press, 2019: 1-6.
- [13] WANG W Y, WU R B. High resolution direction of arrival (DOA) estimation based on improved orthogonal matching pursuit (OMP) algorithm by iterative local searching[J]. Sensors, 2013, 13(9): 11167-11183.
- [14] TRINH-HOANG M, MA W K, PESAVENTO M. A partial relaxation DOA estimator based on orthogonal matching pursuit[C]//Proceedings of 2020 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 2020: 4806-4810.
- [15] SOUBIES E, CHINATTO A, LARZABAL P, et al. Direction-of-arrival estimation through exact continuous $l(2,0)$ -norm relaxation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2021, 28: 16-20.
- [16] ZHENG Y, LI Y Q, LI W, et al. Admix sources DOA estimation based on sparse Bayesian learning[J]. Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering, 2019, 19(2): 407-416.
- [17] LEE W H, LEE J H, SUNG K W. Geometric sequence decomposition with k-simplexes transform[J]. IEEE Transactions on Communications, 2021, 69(1): 94-107.
- [18] BAZZI A, SLOCK D T M, MEILHAC L. Detection of the number of superimposed signals using modified MDL criterion: a random matrix approach[C]//Proceedings of 2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. Piscataway: IEEE Press, 2016: 4593-4597.
- [19] HANSEN P C. The truncated SVD as a method for regularization[J]. BIT Numerical Mathematics, 1987, 27(4): 534-553.
- [20] 侯进, 李昀喆, 李天宇. 基于去噪复数 FastICA 和稀疏重构的相干信号欠定 DOA 估计[J]. 通信学报, 2021, 42(11): 172-181.
- HOU J, LI Y Z, LI T Y. Underdetermined DOA estimation of coherent signals based on denoising complex FastICA and sparse reconstruction[J]. Journal on Communications, 2021, 42(11): 172-181.
- [21] YANG B, KONG W, ZHOU Y. Blind source separation based on generalized gaussian model[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2007, 14(3): 362-367.

[作者简介]



侯进（1969—），女，重庆人，博士，西南交通大学副教授，主要研究方向为无线电测向、数字化遗产保护、图像识别等。



陈鑫强（1999—），男，四川眉山人，西南交通大学硕士生，主要研究方向为无线电测向和深度学习。